附录 1：含有”玩中学”效应经济增长系统的稳定性证明

考虑一个具有 2 个控制变量和 2 个状态变量的一般动态问题，选择控制变量最大化。

令 $L\left(\mathrm{c},\theta,\rho,t\right)=\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}e^{-\rho t}$，则效用函数受约束于（3.2）式和（3.3）式子，给定初始条件 $k(0)\geq 0,h(0)\geq 0,$ 则原汉密尔顿函数变为：

$$H\left(k,h,v,\mu,c,l,t\right)=L\left(\mathrm{c},\theta,\rho,t\right)+v\dot{k}+\mu\dot{h} \qquad \text{（A.1）}$$

根据（3.1）式、（3.5）式及（3.6）式可以很容易看出，其中的生产函数和效用函数都是严格凹函数，因此满足充分条件。那么满足稳态均衡条件和两个横截面条件等多个条件的（k*,h*, l*,c*）和 v*>0 、μ*>0 是最优化问题的极大值。

将状态方程根据（3.2）式、（3.3）式写成约束方程的形式，即有：

$$\text{y-c-}\dot{\text{k}}\text{=0} \qquad \text{和} \qquad \text{f(t)-}\dot{\text{h}}\text{=0}$$

应用拉格朗日乘子法，构造增广泛函：

$$\mathrm{J}'=\int_0^{t_f}\left\{L\left(\mathrm{c},\theta,\rho,t\right)+v^T(t)\left(\text{y-c-}\dot{\text{k}}\right)+\mu^T(t)\left(\text{f(h,l,}\delta,\gamma\text{,t)-}\dot{\text{h}}\right)\right\}dt\text{，}\quad \mathrm{t}_f\rightarrow\infty=0 \qquad \text{（A.2）}$$

将汉密尔顿函数（A.1）式带入（A.2）式可得：

$$\mathrm{J}'=\int_0^{t_f}\left\{H\left(k,h,v,\mu,c,l,t\right)\text{-}v^T(t)\dot{\text{k}}\text{-}\mu^T(t)\dot{\text{h}}\right\}dt\text{，} \qquad \text{（A.3）}$$

对上述（A.3）式子右边后两项 $\dot{\mathrm{k}}$ 和 $\dot{\mathrm{h}}$ 做分部积分可得：

$$\int_0^{t_f}\text{-}v^T(t)\dot{\text{k}}dt=\int_0^{t_f}\dot{v}^Tkdt-v^Tk\Big|_0^{t_f} \qquad \text{（A.4）}$$

$$\int_0^{t_f}\text{-}\mu^T(t)\dot{h}dt=\int_0^{t_f}\dot{\mu}^Thdt-\mu^Th\Big|_0^{t_f} \qquad \text{（A.5）}$$

将（A.4）及（A.5）式子代入（A.3）式子可得：

$$\mathrm{J}'=\left\{\int_0^{t_f}H\left(k,h,v,\mu,c,l,t\right)+\dot{v}^Tk+\dot{\mu}^Th\right\}dt-v^Tk\Big|_0^{t_f}-\mu^Th\Big|_0^{t_f}\text{，} \qquad \text{（A.6）}$$

设 $c(\mathrm{t}),l(t)$，$k(t),h(t)$ 相对于最优控制 $c^*(t)$, $l^*(t)$ 的变分为 $\delta c(\mathrm{t}),\delta l(t),\delta k(t),\delta h(t)$，计算由 $\delta c(\mathrm{t}),\delta l(t),\delta k(t),\delta h(t)$ 引起 J' 的变分为：

$$\delta J'=\int_0^{t_f}\left\{(\delta c)^T\left[\frac{\partial H}{\partial c}\right]+(\delta l)^T\left[\frac{\partial H}{\partial l}\right]+(\delta k)^T\left[\frac{\partial H}{\partial k}+\dot{v}^T\right]+(\delta h)^T\left[\frac{\partial H}{\partial h}+\dot{\mu}^T\right]\right\}dt-(\delta k)^T v\Big|_0^{t_f}-(\delta h)^T\mu\Big|_0^{t_f}$$

使得 J' 取极值的必要条件为：对任意的 $\delta c(\mathrm{t}),\delta l(t),\delta k(t),\delta h(t)$，都有 $\delta J'=0$ 成立。因此可以得到泛函唯一极值的必要条件为：

$$\begin{cases} c^{-\theta}-ve^{\rho t}=0 \\ \dfrac{v}{\mu}-\left(\dfrac{\gamma}{l}+\dfrac{1-\gamma}{1-l}\right)\dot{h}\dfrac{l}{(\alpha-1)y}=0 \\ \dfrac{\dot{v}}{v}+\dfrac{y}{k}\alpha=0 \\ \dfrac{\dot{\mu}}{\mu}+\dfrac{v}{\mu}\dfrac{y}{h}(1-\alpha)+\delta l^{\gamma}(1-\gamma)^{1-\gamma} \\ \lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-\rho t}vk\right)=0 \\ \lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-\rho t}\mu h\right)=0 \end{cases} \qquad \text{(A.7)}$$

上述（A.7）式子前四个条件即为稳态均衡条件，后两个式子即为横截面条件。应用上述条件即可求解到具有存在性和唯一性的最优稳态解。

经过最优化计算可得稳态经济增长路径（如正文的 3.6-3.7 式）：

$$g_h=g_c*\frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}=\frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}\frac{1}{\theta}[\delta(1-l)l^{\gamma}-(\rho-\lambda)]$$

$$g_y*=g_c*=g_k*=\frac{1}{\theta}[\delta(1-l)l^{\gamma}-(\rho-\lambda)]$$

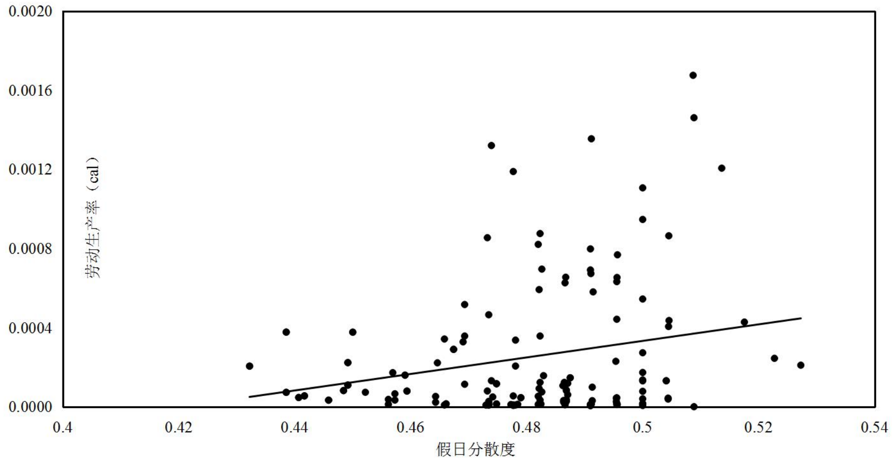
附表 1 对解释变量的内生性豪斯曼检验

解释变量	(b) iv	(B) ols	(b-B) Difference	sqrt(diag(V_b-V_B)) S.E.
假日分散度	3.3357	3.4882	-0.1524	—
受教育程度	-2.0508	-0.2265	-1.8243	0.1531
Log（寿命预期）	1.3155	0.9186	0.3968	—
专利申请总数	0.0001	0.0001	5.68e-06	—
Log（GDP）	0.0589	0.0753	-0.0164	0.0035
Log(出生率)	1.0209	0.9322	0.0886	0.0305
通货膨胀率	-0.0090	-0.0093	0.0004	—
进出口贸易总额	1.44e-13	9.01e-14	5.42e-14	—
chi2(9)	(b-B)'[(V_b-V_B)^(-1)](b-B)= 86.28			
Prob>chi2	0.0000			

杜宾—吴—豪斯曼检验（DWH）

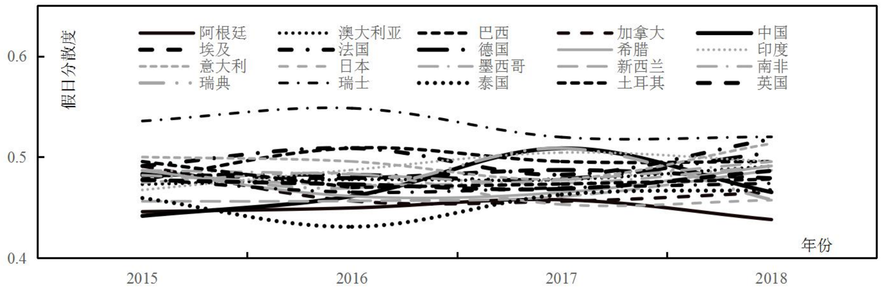
Durbin (score) chi2(2) = 19.3621 (p = 0.0001)

Wu-Hausman F(2,254) = 9.8891 (p = 0.0001)

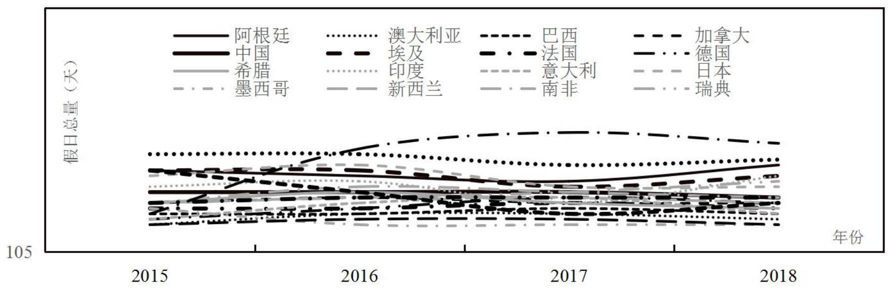


附图 1　世界主要国家的劳动生产率和假日分散度关系散点图

数据来源：世界银行 Barro-Lee 数据库，代表年份为 2018 年。



附图 2 世界主要国家的假日分散度变化程度



附图 3 世界主要国家的假日总量变化程度